L.KAYRIDINE JANOURA
MR : AMMAR BOUAJILA
GSM :92 741 567

Résolutions des inéquations

$1^{ère}$ Année — Exemples pratiques

1 Quelques règles sur les inégalités

1.1 Règle de l'addition et soustraction

Soient a, b et c trois réels

alors $a \leq b \Longleftrightarrow a + c \leq b + c$

et $a \leq b \Longleftrightarrow a - c \leq b - c$

Exemples :

- $2x + 4 \leq 0 \Longleftrightarrow 2x + 4 - 4 \leq 0 - 4 \Longleftrightarrow 2x \leq -4$
- $3x - 2 < -3 \Longleftrightarrow 3x - 2 + 2 < -3 + 2 \Longleftrightarrow 3x < -1$
- $\frac{1}{2}(2x - 4\sqrt{2}) > 0 \Longleftrightarrow x - 2\sqrt{2} > 0$

$\Longleftrightarrow x - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} > 0 + 2\sqrt{2} \Longleftrightarrow x > 2\sqrt{2}$

1.2 a/Règles de la multiplication et division

Soient a, b deux réels et c **un réel positif** ou nul

alors $a \leq b \Longleftrightarrow a \times c \leq b \times c$

et $a \leq b$ et $c \neq 0 \Longleftrightarrow \frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$

Exemples :

- $2x > 7 \Longleftrightarrow 2x \times 3 > 7 \times 3 \Longleftrightarrow 6x > 21$
- $3x \leq 4 \Longleftrightarrow \frac{3x}{3} \leq \frac{4}{3} \Longleftrightarrow x \leq \frac{4}{3}$
- $\sqrt{2}x \geq 3 \Longleftrightarrow \sqrt{2}x \times \sqrt{2} \geq 3 \times \sqrt{2} \Longleftrightarrow 2x \geq 3\sqrt{2}$

1.2b/

Soient a, b deux réels et c **un réel négatif** ou nul

alors $a \leq b \Longleftrightarrow a \times c \geq b \times c$ (Changement de sens de l'inégalité)

et $a \leq b$ et $c \neq 0 \Longleftrightarrow \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$ (Changement de sens de l'inégalité)

Exemples :

- $-x > 4 \Longleftrightarrow -x \times (-1) < 4 \times (-1) \Longleftrightarrow x < -4$
- $-4x < -3 \Longleftrightarrow \frac{-4x}{-4} > \frac{-3}{-4} \Longleftrightarrow x > \frac{3}{4}$
- $-2x \geq 6 \Longleftrightarrow \frac{-2x}{-2} \leq \frac{6}{-2} \Longleftrightarrow x \leq -3$

2 Les inéquations du premier degré à une inconnue

2.1 Méthode de résolution

Méthode de résolution :

- Développer et réduire les deux membres.
- Faire apparaître les x d'un côté et le reste de l'autre.
- Trouver une équation équivalente de la forme $x \leq a$ ou $x \geq a$ ou $x < a$ ou $x > a$.
- Donner l'ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle.

2.2 Exemples

Exemple 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :$6x + 3 > -4x - 5$

Exemple 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :$-3(x + 5) - (2x + 3) \leq 4(x - 1) - 3(2 + x)$

Exemple 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :$(2x + 3)(x - 1) \geq (3 + x)(5 + 2x)$

Exemple 4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :$\frac{x}{2} - \frac{5}{3} < 4 - \frac{x}{3}$

correction exemple 1

$$
\begin{aligned}
& 6x + 3 > -4x - 5 \\
\Leftrightarrow\ & 6x + 4x > -5 - 3 \\
\Leftrightarrow\ & 10x > -8 \\
\Leftrightarrow\ & x > -\frac{8}{10} \\
\Leftrightarrow\ & x > -\frac{4}{5} \text{ ou } x > -0,8
\end{aligned}
$$

donc $S = \left]-\frac{4}{5}; +\infty\right[$

correction exemple 1

$$
\begin{aligned}
& -3(x+5) - (2x+3) \leq 4(x-1) - 3(2+x) \\
\Leftrightarrow\ & -3x - 15 - 2x - 3 \leq 4x - 4 - 6 - 3x \\
\Leftrightarrow\ & -5x - 18 \leq x - 10 \\
\Leftrightarrow\ & -5x - x \leq -10 + 18 \\
\Leftrightarrow\ & -6x \leq 8 \\
\Leftrightarrow\ & x \geq -\frac{8}{6} \\
\Leftrightarrow\ & x \geq -\frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

donc $S = \left[-\frac{4}{3}; +\infty\right[$

correction exemple 1

$$
\begin{aligned}
& (2x+3)(x-1) \geq (3+x)(5+2x) \\
\Leftrightarrow\ & 2x^2 - 2x + 3x - 3 \geq 15 + 6x + 5x + 2x^2 \\
\Leftrightarrow\ & 2x^2 + x - 3 \geq 2x^2 + 11x + 15 \\
\Leftrightarrow\ & 2x^2 - 2x^2 + x - 11x \geq 15 + 3 \\
\Leftrightarrow\ & -10x \geq 18 \\
\Leftrightarrow\ & x \leq -\frac{18}{10} \\
\Leftrightarrow\ & x \leq -\frac{9}{5} \text{ ou } x \leq -1,8
\end{aligned}
$$

donc $S = \left]-\infty; -\frac{9}{5}\right]$

correction exemple 1

$$\frac{x}{2} - \frac{5}{3} < 4 - \frac{x}{3} \Leftrightarrow \frac{3x}{6} - \frac{10}{6} < \frac{24}{6} - \frac{2x}{6}$$

$$\Leftrightarrow 3x - 10 < 24 - 2x$$

$$\Leftrightarrow 3x + 2x < 24 + 10 \Leftrightarrow 5x < 34 \Leftrightarrow x < \frac{34}{5}$$

donc $S = \left]-\infty; \frac{34}{5}\right[$

3 Signe d'un binôme

3.1 Définition d'un binôme

Définition :

> Un binôme est une expression littérale de la forme $ax + b$ avec $a \neq 0$

3.3 Tableau de signe d'un binôme

le signe du binôme $ax + b$ est donné par le signe du nombre a qui est devant le x. Pour généraliser on peut dresser le tableau de signe qui fonctionne pour tous les binômes.

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$ax+b$		Signe opposé de a	0	Signe de a	

Activité :

- Résoudre $2x + 3 < 0$
- Résoudre $2x - 3 < 0$
- Résoudre $-2x + 3 < 0$
- Résoudre $-2x - 3 < 0$

CORRECTION

. 2x+3=0 sig 2x=-3 sig x=-3/2

x	$-\infty$		$-3/2$		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$	

D'où S_{IR}=]-∞ ,-3/2[

. 2x-3=0 sig 2x=3 sig x=3/2

x	$-\infty$		$3/2$		$+\infty$
$2x-3$		$-$	0	$+$	

D'où S_{IR}=]-∞ ,3/2[

. −2x+3=0 sig −2x=−3 sig x=3/2

x	$-\infty$		$3/2$		$+\infty$
$-2x+3$		$+$	0	$-$	

D'où S_{IR}=]3/2,+∞[

. −2x−3=0 sig −2x=3 sig x=3/2

x	$-\infty$		$-3/2$		$+\infty$
$-2x-3$		$+$	0	$-$	

D'où S_{IR}=]-3/2,+∞[

4 Signe d'un produit de binômes

Tableau de signe

Voici un exemple pour expliquer la méthode permettant de dresser un tableau de signe d'un produit de binômes :

Dressons le tableau des signes de : A(x).Puis resoudre A(x)<0

$$A(x) = -x(2x-3)(x+6)(4-2x)$$

- Cherchons les valeurs de x qui annulent chacun des binômes de $A(x)$:
  - ➠ $-x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
  - ➠ $2x-3 = 0 \Leftrightarrow x = 3/2$
  - ➠ $x+6 = 0 \Leftrightarrow x = -6$
  - ➠ $4-2x = 0 \Leftrightarrow x = 2$

- Dressons maintenant le tableau des signes de $A(x)$:

x	$-\infty$		-6		0		$3/2$		2		$+\infty$
$-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	
$2x-3$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+6$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$4-2x$		$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

S_{IR}= $\left]-6;0\right[\cup \left]\frac{3}{2};2\right[$

5 Signe d'une expression rationnelle factorisée

Tableau de signe

Toujours à l'aide des tableaux de signe des binômes et des règles des signes pour la multiplication et la division, on peut trouver le signe d'une expression rationnelle factorisée. Voici un exemple pour expliquer la méthode permettant de dresser un tableau de signe d'une expression rationnelle factorisée :

Dressons le tableau des signes de B(x).Puis résoudre B(x)≤ 0

$$B(x) = \frac{2x(3x-6)}{(x-3)(1-x)}$$

CORRECTION

Mais cette fois ci Attention !!!!! Le dénominateur doit être différent de 0 !!!!

donc on commence à chercher les valeurs interdites

- $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$
- $1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

d'où 1 et 3 sont les valeurs interdites

puis on cherche les autres valeurs ou s'annulent les autres binômes de B(x)

- $2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

- Dressons maintenant le tableau des signes de $B(x)$:

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$3x-6$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-3$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$1-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	
$B(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	

les deux barres pour indiquer lesvaleurs interdites

conclusion

S_{IR}=]-∞, 0]∪]1,2]∪]3,-∞]

6 Les inéquations du second degré à une inconnue

6.1 Méthode de résolution

Méthode de résolution :

- Tout faire apparaître dans le même membre.
- Factoriser le membre non nul.
- Dresser son tableau de signe.
- Donner l'ensemble des solutions.

6.2 Exemples

Exemple 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(x-2)(3x-4) \leq (x-2)(2x+6)$

Exemple 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $4(x-2)^2 > 9$

Exemple 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :$(x+3)^2 < (2x+1)^2$

correction exemple 1

$(x-2)(3x-4) \leq (x-2)(2x+6)$
$\Leftrightarrow (x-2)(3x-4)-(x-2)(2x+6) \leq 0$
$\Leftrightarrow (x-2)[(3x-4)-(2x+6)] \leq 0$
$\Leftrightarrow (x-2)(3x-4-2x-6) \leq 0$
$\Leftrightarrow (x-2)(x-10) \leq 0$

Cherchons les valeurs qui annulent les binômes :

➠ $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

➠ $x-10=0 \Leftrightarrow x=10$

Dressons le tableau des signes de $A(x)=(x-2)(x-10)$

x	$-\infty$		2		10		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-10$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ensemble des solutions :

$S=[2;10]$

correction exemple 2

$4(x-2)^2 > 9$
$\Leftrightarrow 4(x-2)^2-9 > 0$
$\Leftrightarrow [2(x-2)+3][2(x-2)-3] > 0$
$\Leftrightarrow (2x-4+3)(2x-4-3) > 0$
$\Leftrightarrow (2x-1)(2x-7) > 0$

Cherchons les valeurs qui annulent les binômes :

➠ $2x-1=0 \Leftrightarrow x=1/2$

➠ $2x-7=0 \Leftrightarrow x=7/2$

Dressons le tableau des signes de $B(x)=(2x-1)(2x-7)$

x	$-\infty$		1/2		7/2		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$2x-7$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$B(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ensemble des solutions :

$S=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{7}{2};+\infty\right[$

correction exemple 3

$(x+3)^2 < (2x+1)^2$
$\Leftrightarrow (x+3)^2-(2x+1)^2 < 0$
$\Leftrightarrow [(x+3)+(2x+1)][(x+3)-(2x+1)] < 0$
$\Leftrightarrow (3x+4)(-x+2) < 0$

Cherchons les valeurs qui annulent les binômes

➠ $3x+4=0 \Leftrightarrow x=-4/3$

➠ $-x+2=0 \Leftrightarrow x=2$

Dressons le tableau des signes de $C(x)=(3x+4)(-x+2)$

x	$-\infty$		$-4/3$		2		$+\infty$
$3x+4$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-x+2$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$C(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ensemble des solutions :

$S=\left]-\infty;-\frac{4}{3}\right[\cup]2;+\infty[$

7 Les inéquations avec expressions rationnelles

7.1 Méthode de résolution

Méthode de résolution

- Trouver l'ensemble d'étude de l'inéquation.
- Tout faire apparaître dans le même membre.
- Mettre au même dénominateur le membre non nul.
- Factoriser le numérateur.
- Dresser le tableau de signe de l'expression rationnelle factorisée.
- Donner l'ensemble des solutions.

7.2 Exemples

Exemple 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{2x+3}{x-1} \leq 4$ Ensemble d'étude :

Exemple 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{9}{(x+1)^2} > 1$

correction exemple 1

L'expression $\frac{2x+3}{x-1}$ existe si et seulement si $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ donc $E = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Transformation de l'inéquation :

$\frac{2x+3}{x-1} \leq 4$

$\Leftrightarrow \frac{2x+3}{x-1} - 4 \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{2x+3}{x-1} - \frac{4(x-1)}{x-1} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{2x+3-4x+4}{x-1} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{-2x+7}{x-1} \leq 0$

Cherchons les valeurs qui annulent les binômes :

➠ $-2x+7=0 \Leftrightarrow x = 7/2$

➠ $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

Dressons le tableau des signes de $A(x) = \frac{-2x+7}{x-1}$

x	$-\infty$		1		$7/2$		$+\infty$
$-2x+7$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$	0	$+$	|	$-$	
$A(x)$		$-$	||	$+$	0	$-$	

Ensemble des solutions :

$S =]-\infty; 1[\cup \left]\frac{7}{2}; +\infty\right[$

correction exemple 2

Ensemble d'étude :

L'expression $\frac{9}{(x+1)^2}$ existe si et seulement si $(x+1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ donc $E = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Transformation de l'inéquation :

$\frac{9}{(x+1)^2} > 1$

$\Leftrightarrow \frac{9}{(x+1)^2} - 1 > 0$

$\Leftrightarrow \frac{9}{(x+1)^2} - \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{9-(x+1)^2}{(x+1)^2} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{(3+x+1)(3-x-1)}{(x+1)^2} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{(x+4)(-x+2)}{(x+1)^2} > 0$

Cherchons les valeurs qui annulent les binômes :

➠ $x+4=0 \Leftrightarrow x=-4$

➠ $-x+2=0 \Leftrightarrow x=12$

➠ $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

Dressons le tableau des signes de $B(x) = \frac{(x+4)(-x+2)}{(x+1)^2}$

x	$-\infty$		-4		-1		2		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$2-x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$(x+1)^2$		$+$	|	$+$	0	$+$	|	$+$	
$B(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	

Ensemble des solutions :

$S =]-4; -1[\cup]-1; 2[$